

**T.D. série 2 : groupe symétrique**

**Exercice 1.** (a) Montrer que l'application  $f : i \mapsto i^3 - 5E(\frac{1}{5}i^3) + 1$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .  
 Déterminer l'ordre de  $f$ , et calculer  $f^{2004}$ .

(b) Pour quelles valeurs de  $(m, n)$  est-ce que l'application  $g_{m,n} : i \mapsto mi - nE(\frac{m}{n}i) + 1$  est-elle un élément de  $S_n$  ?

**Exercice 2.** Dans  $\mathfrak{S}_8$ , on considère les permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  définies par

$$\sigma_1 = (1 \ 5 \ 6 \ 8) \ , \quad \sigma_2 = (5 \ 3 \ 6 \ 2 \ 7) \ , \quad \sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \ .$$

- (a) Décomposer la permutation  $\sigma_3$  en produit de cycles à supports disjoints.
- (b) Quel est l'ordre de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ?
- (c) Décomposer les permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  en produit de transpositions.
- (d) Quelle est la signature de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ?
- (e) Calculer  $\sigma_1^{2004}, \sigma_2^{2004}, \sigma_3^{2004}$  et donner l'ordre de ces permutations.

**Exercice 3.** On considère la permutation  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_{13}$  définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 8 & 1 & 12 & 10 & 6 & 3 & 2 & 7 & 13 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

- (a) Décomposer  $\sigma$  en produit de cycles disjoints. En déduire sa signature.
- (b) Ecrire  $\sigma$  comme produit de transpositions. En déduire sa signature.
- (c) Compter le nombre d'inversions de  $\sigma$ , et en déduire sa signature.
- (d) Quel est l'ordre de  $\sigma$  ? Calculer  $\sigma^{2004}$ , et donner l'ordre de cet élément.

**Exercice 4. (examen janvier 2003) Dual de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ .**

On considère ici le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et son dual  $E^*$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = AB$

et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2}$  et  $F = \{A, B, C\}^\perp \subset E^*$ .

- (a) Montrer que  $\mathcal{B} = (I, A, B, C)$  est une base de  $E$ . En déduire le rang de la famille  $(A, B, C)$ , puis la dimension de  $F$ .
- (b) Montrer que  $f \in F$  et en déduire une base de  $F$ .
- (c) On pose  $f_X(Y) = f(XY)$  pour tout  $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{B}^* = (f, f_A, f_B, -f_C)$  est la base duale de  $\mathcal{B} = (I, A, B, C)$ .