Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 2^{e} année
Algèbre 3
1er semestre 2004–2005

T.D. série 3 : déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 3.14 \\ 2 & 7 & 1 & 2.71 \\ 1 & 4 & 1 & 1.41 \\ 0 & 5 & 7 & 0.57 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c+d & a+d & a+b & b+c \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 2 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \ddots & \ddots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix},$$

et les déterminants d'ordre $n+1$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (a_0) & \ddots & a_1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \ldots & C_k^n \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \ldots & C_{k+1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{k+n}^1 & C_{k+n}^2 & \ldots & C_{k+n}^n \end{vmatrix},$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos\theta_0 & \cos\theta_1 & \ldots & \cos\theta_n \\ \cos 2\theta_0 & \cos 2\theta_1 & \ldots & \cos 2\theta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos n\theta_0 & \cos n\theta_1 & \ldots & \cos n\theta_n \end{vmatrix}, \quad V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \\ P_0(x) & P_1(x) & \ldots & P_n(x) \end{vmatrix},$$

avec, dans V_n : $P_i(x) = \prod_{k\neq i}(x-a_k)$ pour $i = 0, ..., n$. En supposant les a_i distincts, déterminer des nombres $b_0, ..., b_n$ tels que $\sum_{i=0}^{n} b_i P_i(x) = 1$.
(Indications : pour C_n, linéariser $\cos^k\theta$; pour V_n, montrer d'abord l'indépendance de x ; pour les deux, conclure avec la formule de Vandermonde.)

Exercice 3. Dans un livre d'exercices corrigés d'algèbre linéaire pour le DEUG, on trouve l'exercice suivant :

« A-t-on bien pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'égalité : $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$? »

avec la « correction » :

« Non, on n'a cette égalité que pour $a \in \{0, \pm 1\}$, car $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. »

Qu'en pensez-vous ? Proposez une version correcte de l'exercice intentionné.

Exercice 4. On considère le déterminant d'ordre n,

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{2} \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

(a) Etablir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

(b) En déduire une formule pour $\Delta_n = D_n - D_{n-1}$, puis la valeur de Δ_n en fonction de n, et enfin D_n en fonction de n.

(c) Généraliser au cas ou 3 et $\sqrt{2}$ sont remplacés par $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On rappelle que le rang d'une matrice A est égal à l'ordre du déterminant non nul, d'ordre le plus élevé, extrait de A. Donner le rang de

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. En utilisant des déterminants, résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, en fonction de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ donnés ;

(b) $\left\{ \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned} \right.$; (c) $\left\{ \begin{aligned} y + 3\,z &= 0 \\ 3\,x + 2\,y - 2\,z &= 1 \\ x - 3\,z &= 1 \end{aligned} \right.$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$, en fonction de $m \in \mathbb{R}$ donné.

Exercice 7. Calculer, si elle existe, la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$